Universidad De Los Lagos
Departamento de Ciencias Exactas
Pedagogía en Matemática y Computación

Geometría 1 - 2015
Profesora: Cecilia Planas
Ayudante: Samuel Fuentes

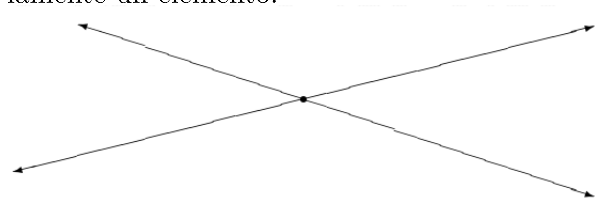


Contenidos Ayudantía #2

La ayudantía 2 es el jueves 15 de octubre a las 14.15h en la sala E 203. Los ejercicios a resolver estarán relacionados con los siguientes postulados, teoremas y definiciones:

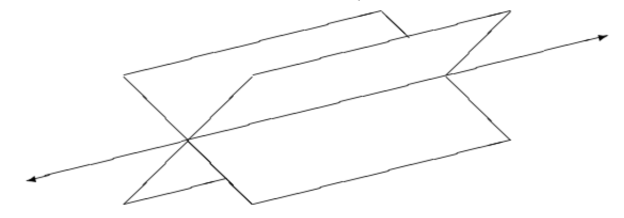
Postulado 1. A todo plano pertenecen al menos tres puntos diferentes que no están alineados, y al espacio pertenecen al menos cuatro puntos diferentes que no están en un plano.

Teorema 1. Si dos rectas diferentes tienen intersección no vacía, entonces la intersección tiene solamente un elemento.



Postulado 2 (del plano)**.** Tres puntos cualesquiera están en algún plano y tres puntos cualesquiera no alineados están solamente en un plano.

Postulado 3 (De la intersección de planos)**.** Si dos planos diferentes se intersecan, entonces su intersección es una recta.



Teorema 2 (de la llaneza)**.** Si dos puntos diferentes de una recta pertenecen a un plano, entonces la recta a la que pertenecen los puntos está incluida en el plano.

Teorema 3. Dada una recta y un punto que no está en ella, existe solamente un plano al cual pertenece el punto y en el cual la recta está incluida.

Teorema 4. Dadas dos rectas diferentes que se intersecan, existe un único plano en el cual están incluidas.

Definición 1. Un conjunto de puntos se dice que es convexo si para cada dos puntos diferentes P y Q del conjunto se tiene que el segmento $\overline{PQ}$ está incluido en el conjunto.



conjunto no convexo



Postulado 4 (de separación del plano)**.** Sean l una recta y α un plano en el cual está incluida l. El conjunto de puntos del plano α que no están en en la recta l son la unión de dos conjuntos Λ_1 y Λ_2 tales que:

1. Los dos conjuntos Λ_1 y Λ_2 son convexos.
2. Si $P \in \Lambda_1$ y $Q \in \Lambda_2$, entonces $\overline{PQ}$ interseca a la recta.

Definición 2. En el postulado de separación del plano los conjuntos Λ_1 y Λ_2 se llaman lados de la recta l. Si $P \in \Lambda_1$ y $Q \in \Lambda_2$, decimos que P y Q están en lados opuestos de la recta l, también se dice que Λ_1 y Λ_2 son lados opuestos (de una recta). A la recta l se le llama arista o borde de cada uno de los conjuntos Λ_1, Λ_2, $\Lambda_1 \cup l$ y $\Lambda_2 \cup l$.

Definición 3. Si Λ es un lado de la recta l , diremos que los conjuntos de la forma Λ y $\Lambda \cup l$ son semiplanos. Para ser más específicos, los conjuntos de la forma Λ se llaman semiplanos abiertos y los de la forma $\Lambda \cup l$ se llaman semiplanos cerrados.

Teorema 5. Si Λ_1 y Λ_2 son lados opuestos de una recta l, entonces $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing$

Postulado 5. De la separación del espacio: Dado un plano γ, el conjunto de puntos del espacio que no están en γ es la unión de dos conjuntos $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ tales que:

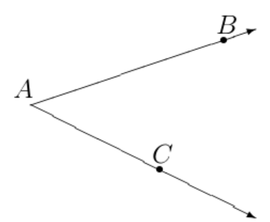
1. Los dos conjuntos $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ son convexos.

2. Si $P \in \mathcal{G}_1$ y $Q \in \mathcal{G}_2$, entonces $\overline{PQ}$ corta al plano γ.

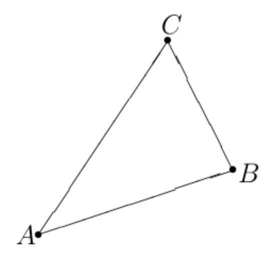
Definición 4. Los dos conjuntos $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ descritos en el postulado de la separación del espacio se llaman lados del plano γ. Si $P \epsilon \mathcal{G}_1$, y $Q \epsilon \mathcal{G}_2$, decimos que P y Q están en lados opuestos del plano γ, también se dice que $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ son lados opuestos (de un plano). Al plano γ se le llama cara de cada uno de los conjuntos $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_1 \cup l$ y $\mathcal{G}_2 \cup l$.

Definición 5. Si $\mathcal{G}$ es un lado de un plano γ, diremos que los conjuntos de la forma $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G} \cup \gamma$ son semiespacios. Para ser más específicos, los conjuntos de la forma $\mathcal{G}$ se llaman semiespacios abiertos y los de la forma $\mathcal{G} \cup \gamma$ se llaman semiespacios cerrados.

Definición 6. A la unión de dos rayos de la forma $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ que no están incluidos en una misma recta se le llama ángulo. Al ángulo que es la unión de dos rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se le denomina indistintamente por $\angle BAC$ ó por $\angle CAB$. Al punto A de un ángulo $\angle BAC$ se le llama vértice del ángulo y a los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se les llama lados del ángulo.



Definición 7. Sean A, B y C tres puntos no alineados. A la unión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se llama triángulo. A tal triángulo se le denota como $\triangle ABC$. A los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se les llama lados y a los puntos A, B y C se les llama vértices del $\triangle ABC$.



Definición 8. Sea $\angle ABC$ un ángulo. Definimos el interior del $\angle ABC$ como el conjunto de todos los puntos del plano en el cual está incluido el ángulo tales que estén en el mismo lado que C de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y en el mismo lado que A de la recta $\overleftrightarrow{BC}$. Al conjunto de todos los puntos del plano que no están en el ángulo ni en su interior se le llama exterior del ángulo.

Definición 9. Sea $\triangle ABC$ un triángulo. Al conjunto de todos los puntos del plano en el cual está incluido el triángulo tales que están en los interiores de los angulos $\angle ABC$, $\angle BAC$ y $\angle ACB$ se le llama interior del $\triangle ABC$. El exterior del $\triangle ABC$ es el conjunto de todos los puntos del plano que no están en el $\triangle ABC$ ni en su interior.

Definición 10. A la unión de un triángulo con su interior se le llama región triangular. El triángulo será el borde de la región triangular y el interior de él también será el interior de la región triangular correspondiente.

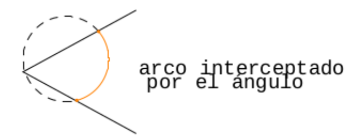
Definición 11. Un ángulo central de una circunferencia es un ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia.

Definición 12. Decimos que un ángulo intercepta a un arco si:

1. los extremos del arco están en el ángulo

2. todos los otros puntos del arco están en el interior del ángulo, y

3. a cada lado del ángulo pertenece un extremo del arco.

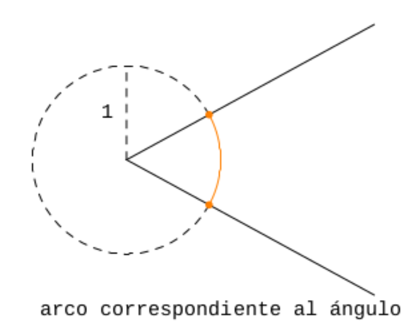


Definición 13. El arco menor AB corresponde al ángulo $\angle DOC$ si:

1. el arco AB está incluido en una circunferencia de radio 1,

2. el ángulo $\angle DOC$ es un ángulo central de tal circunferencia, y

3. el ángulo $\angle DOC$ intercepta al arco AB



Definición 14. Dos arcos incluidos en circunferencias congruentes son congruentes si tienen la misma longitud.

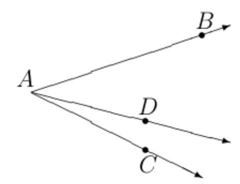
Definición 15. La medida de un ángulo $\angle DOC$, denotada por —$\angle DOC$— ó $\measuredangle DOC$ es la longitud de su arco correspondiente.

Definición 16. Un grado está definido como $\frac{\pi}{180}$. Es decir, $\frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi/2}{90} = \frac{\pi/3}{60} = \frac{\pi/6}{30} = \frac{\pi/4}{45}$ es un grado, lo cual significa que:
π =180 grados,
2π =360 grados,
$\frac{\pi}{2}$ =90 grados,
$\frac{\pi}{3}$ =60 grados,
$\frac{\pi}{6}$ =30 grados,
$\frac{\pi}{4}$ =45 grados.
Si $x \in \mathbb{R}$, entonces x° denota x grados, así por ejemplo $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$, $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$, $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$, $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$, $\frac{\pi}{180} = 1^\circ$

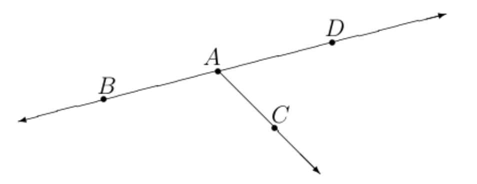
Teorema 6. La medida de un ángulo es un número real mayor que 0 y menor que π

Postulado 6 (de construcción de ángulos)**.** Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo incluido en la arista de un semiplano Λ. Para cada número r entre 0 y π existe únicamente un rayo $\overrightarrow{AP}$, con $P \in \Lambda$, tal que $\measuredangle PAB = r$

Teorema 7 (de adición de ángulos)**.** Si D está en el interior del $\angle BAC$, entonces $\measuredangle BAC = \measuredangle BAD + \measuredangle DAC$.



Definición 17. Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ son rayos opuestos, y $\overrightarrow{AC}$ es otro rayo decimos que los ángulos $\angle BAC$ y $\angle CAD$ forman un par lineal.



Definición 18. Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es π. Además se dice que uno es suplementario del otro.

Definición 19. Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es $\frac{\pi}{2}$. Además se dice que uno es complemento del otro.

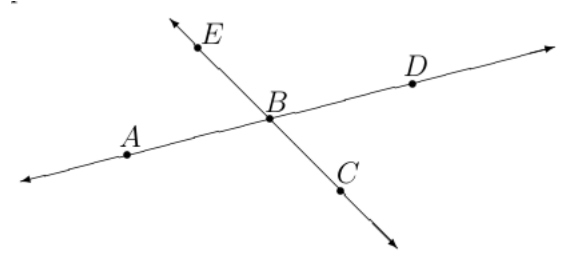
Teorema 8 (Teorema del suplemento o del par lineal)**.** Si dos ángulos forman un par lineal entonces son suplementarios

Definición 20. Un ángulo recto es un ángulo cuya medida es $\frac{\pi}{2}$, es decir cuya medida es de 90°

Definición 21. Si $\angle BAC$ es recto, entonces decimos que los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son perpendiculares (en A) y a tal hecho lo denotamos como $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$. De manera más general, si ℓ_1 es una recta, rayo o segmento tal que $A \in \ell_1 \subset \overleftrightarrow{AB}$ y ℓ_2 es una recta, rayo o segmento tal que $A \in \ell_1 \subset \overleftrightarrow{AC}$, entonces decimos que ℓ_1 es perpendicular a ℓ_2 o que ℓ_1 y ℓ_2 son perpendiculares y los denotamos como $\ell_1 \perp \ell_2$

Definición 22. Dos ángulos que tienen la misma medida se dice que son congruentes, también se dice que uno es congruente con el otro.

Definición 23. Dos ángulos $\angle ABC$ y $\angle DBE$ son opuestos por el vértice si $\overrightarrow{BD}$ es opuesto a un lado de $\angle ABC$ y el otro lado de $\angle DBE$ es opuesto al otro lado de $\angle ABC$.



Teorema 9 (De los ángulos opuestos por el vértice)**.** Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes.